

Porcentagens Relacionadas de Acréscimo e Desconto

Arkanon <arkanon@lsd.org.br>

20/02/2013 00:31:30

Definições

- a. Dada a porcentagem P , $p = \frac{P}{100}$ será denominado **fator percentual para P** e, multiplicado a um montante M , devolverá $P\%$ de M . Assim, $P\%$ de M é igual a $M \cdot p$
- b. Dada a porcentagem P de acréscimo ou desconto sobre um montante inicial I e considerando p o fator percentual para P , p_r será denominado **fator percentual relativo a p** quando, multiplicado a I , levar diretamente ao montante final F .

Para um montante inicial que receberá um acréscimo de $A\%$, temos:

$$A\% \rightarrow a = \frac{A}{100}$$

$$F = I + I \cdot a$$

$$= I \cdot (1 + a)$$

$$F = I \cdot a_r \quad a_r = 1 + a$$

Para um montante inicial que receberá um desconto de $D\%$, temos:

$$D\% \rightarrow d = \frac{D}{100}$$

$$F = I - I \cdot d$$

$$= I \cdot (1 - d)$$

$$F = I \cdot d_r \quad d_r = 1 - d$$

Problema

Aplicando $A\%$ de acréscimo a um montante inicial M_1 , quantos $D\%$ devem ser descontados do montante final M_2 para retornarmos a M_1 ?

Solução

$$M_2 = M_1 \cdot a_r \quad \text{ao fazermos o acréscimo} \quad (1)$$

$$M_1 = M_2 \cdot d_r \quad \text{ao fazermos o desconto} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$M_2 = M_2 \cdot d_r \cdot a_r$$

$$1 = 1 \cdot d_r \cdot a_r$$

$$(1 - d) \cdot (1 + a) = 1$$

$$1 - d = \frac{1}{1 + a}$$

$$d = 1 - \frac{1}{1 + a}$$

$$= \frac{1 + a - 1}{1 + a}$$

$$d = \frac{a}{1 + a} = \frac{a}{a_r}$$

$$1 + a = \frac{1}{1 - d}$$

$$a = \frac{1}{1 - d} - 1$$

$$= \frac{1 - 1 + d}{1 - d}$$

$$a = \frac{d}{1 - d} = \frac{d}{d_r}$$

Considerações

1. Os fatores percentuais de acréscimo e desconto, portanto as respectivas porcentagens, independem do montante inicial.
2. As duas fórmulas são basicamente a mesma, mudando apenas a interpretação de cada porcentagem:

$$p_2 = \frac{p_1}{p_{1r}}$$

O “outro fator percentual” é a relação entre o fator percentual e seu fator percentual relativo.

3. Outra forma útil de enunciar o problema é:

Dado um montante M_1 do qual serão descontados $D\%$, quantos $A\%$ de acréscimo M_1 deve receber para que, após descontados os $D\%$ do novo montante M_2 ainda tenhamos M_1 ?

Exemplo

Ao cobrar R\$ 5.327,28 é obrigatório um desconto de 6%, de forma que o montante recebido será inferior ao cobrado. Que montante deve ser cobrado para que, com esse desconto de 6%, receba-se o originalmente desejado?

$$D = 6\%$$

$$d = \frac{6}{100} = 0,06$$

$$M_1 = 5.327,28$$

R o valor recebido após o desconto

$$M_1 \cdot d = 5.327,28 \cdot 0,06 \approx 319,64$$

$$R = 5.327,28 - 319,64 = 5.007,64$$

$$d_r = 1 - 0,06 = 0,94$$

$$a = \frac{0,06}{0,94} \approx 0,06382978723404255319 \rightarrow A \approx 6,383\%$$

$$M_1 \cdot a = 5.327,28 \cdot 0,06383 \approx 340,04$$

$$M_2 = 5.327,28 + 340,04 = 5.667,32$$

Prova

$$M_2 \cdot d = 5.667,32 \cdot 0,06 \approx 340,04$$

$$R = 5.667,32 - 340,04 = 5.327,28$$

Portanto, se pretendemos receber R\$ 5.327,28, mas do montante cobrado será obrigatoriamente descontado 6%, devemos cobrar R\$ 340,04 a mais, ou seja, R\$ 5.667,32. Com isso, descontados os 6%, ainda teremos os R\$ 5.327,28.